

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ЛУБЕНСЬКИЙ ФІНАНСОВО-ЕКОНОМІЧНИЙ
КОЛЕДЖ ПДАА

Матеріали для самостійного вивчення
з дисципліни «Вища математика»
для студентів 2 курсу

Теми 4-5.
ФУНКЦІЯ, ГРАНИЦЯ І НЕПЕРЕРВНІСТЬ
ФУНКЦІЇ

Спеціальності:

5.03050901 “Бухгалтерський облік”
5.03050801 “Фінанси і кредит”
5.03050401 “Економіка підприємства”
5.03050702 “Комерційна діяльність”

Розглянуто і схвалено цикловою комісією
загальноосвітніх та гуманітарно-соціальних дисциплін
Протокол № 2 від «3» вересня 2015 р.
Голова циклової комісії _____ А.О. Грисюк

Питання для самостійної підготовки

1. Поняття функції, область визначення, способи задання.
2. Основні елементарні функції, їх властивості і графіки.
3. Перетворення графіків функцій.
4. Застосування функцій в економіці.
5. Неперервність функції в точці та на відрізку.
6. Точки розриву функцій, їх класифікація.
7. Основні теореми про неперервні функції.

Поняття, терміни та формули, які необхідно знати

Функція, способи задання функції.

Область визначення та область значень функції.

Способи перетворення графіків функцій.

Границя функції.

Теореми про границі (без доведення).

Методи знаходження границі функції в точці та на нескінченності.

Неперервність функції, поняття точки розриву.

ПОНЯТТЯ ФУНКЦІЇ, ОБЛАСТЬ ВИЗНАЧЕННЯ, СПОСОБИ ЗАДАННЯ

Розглянемо дві змінні величини $x \in D \subseteq R$ і $y \in E \subseteq R$.

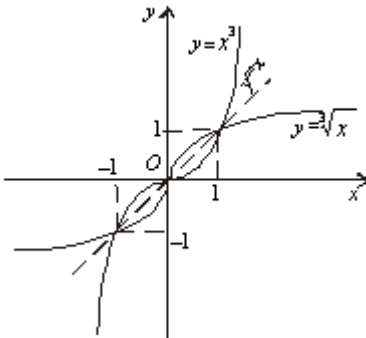
Функцією $y = f(x)$ називається така відповідність між множинами D і E , при якій кожному значенню змінної x відповідає єдине значення змінної y .

При цьому вважають, що:

- x – незалежна змінна, або аргумент;
- y – залежна змінна, або функція;
- f – символ закону відповідності;
- D – область визначення функції;
- E – множина значень функції.

Розрізняють такі **способи задання функції**:

- аналітичний,
- графічний,
- табличний.

Функція $y = F(u)$, де $u = \varphi(x)$, називається складною (складеною) функцією, або суперпозицією функцій $F(u)$ та $\varphi(x)$, і позначається $y = F(\varphi(x))$.	$y = 5^{\sin^2 x}$ – складена функція, у даному випадку вона є суперпозицією трьох функцій: $y = 5^u$, $u = v^2$ та $v = \sin x$.
Нехай функція $y = f(x)$ встановлює відповідність між множинами D та E. Якщо обернена відповідність між множинами E та D буде функцією, то вона називається оберненою до даної $y = f(x)$; її позначають $y = f^{-1}(x)$. За означенням, для взаємно обернених функцій виконується рівність: $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x.$ Графіки взаємно обернених функцій симетричні відносно прямої $y = x$.	$f(x) = x^3$ та $f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x}$ – взаємно обернені функції: $\sqrt[3]{x^3} = (\sqrt[3]{x})^3 = x.$ 
Функція (функціональна залежність змінної y від змінної x) називається неявною, якщо її задано рівнянням $F(x, y) = 0,$ яке не розв'язане відносно змінної y.	Рівняння $y + x + 2^y = 0$ задає неявну функцію y від x.

Система рівнянь $\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}$ визначає параметричну залежність функції y від змінної x (змінна t тут виступає параметром). Виразити залежність y від x у вигляді $y = f(x)$ можна виключенням параметра t із даної системи рівнянь.	Параметрична залежність $\begin{cases} x = R \cos t \\ y = R \sin t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$ визначає коло радіуса R з центром у початку координат. Виконавши піднесення обох частин параметричних рівнянь до квадрату і підсумовуючи результат, дістанемо: $x^2 + y^2 = R^2 (\cos^2 t + \sin^2 t),$ або $x^2 + y^2 = R^2$.
--	---

ОСНОВНІ ЕЛЕМЕНТАРНІ ФУНКЦІЇ, ЇХ ВЛАСТИВОСТІ І ГРАФІКИ

Основними елементарними функціями є:

- 1) степенева $y = x^a$;
- 2) показникова $y = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 3) логарифмічна $y = \log_a x$, $a > 0$, $a \neq 1$;
- 4) тригонометричні: $y = \sin x$; $y = \cos x$; $y = \operatorname{tg} x$; $y = \operatorname{ctg} x$;
- 5) обернені тригонометричні: $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$.

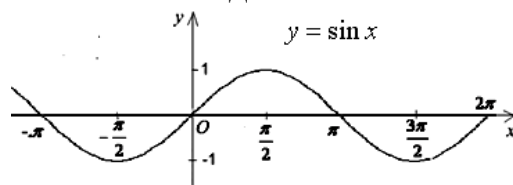
Функція вважається **елементарною**, якщо вона може бути побудована з основних елементарних функцій за допомогою скінченної кількості алгебраїчних дій та суперпозицій. Наприклад, елементарними є такі функції:

$$y = \left(3 \cos x - \frac{1}{x} \right)^2; \quad y = \sqrt{1 + \ln x}; \quad y = 4^{\arcsin x}; \quad y = \log_2(x^2 - 5x + 6).$$

Областю визначення функції $D(f)$ називається множина всіх допустимих значень її аргументу. Якщо виділити всі значення аргументу, для яких можна обчислити значення функції, така область визначення називається <i>природною</i>. Крім цього, область визначення функції може бути <i>заданою</i>; у цьому випадку вона залежить також від умови задачі.	Знайдемо область визначення функції $y = \frac{\ln(2+x)}{x-1}$. Функція визначена, якщо виконується система: $\begin{cases} 2+x > 0 \\ x-1 \neq 0 \end{cases}, \text{ звідси } \begin{cases} x > -2 \\ x \neq 1 \end{cases}.$ Таким чином, область визначення функції являє собою об'єднання двох інтервалів: $(-2, 1) \cup (1, +\infty).$
--	--

Якщо функція задана графічно, її область визначення можна знайти, як проекцію точок графіка на вісь абсцис.

Областю визначення функції $y = \sin x$, заданої графіком, є множина всіх дійсних чисел.

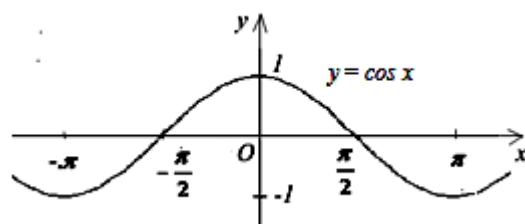


Функція $y = f(x)$ називається **парною**, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ виконується умова: $f(-x) = f(x)$.

Графік парної функції симетричний відносно осі ординат.

Функція $y = \cos x$ – парна, оскільки для всіх дійсних значень x виконується:

$$\cos(-x) = \cos x.$$

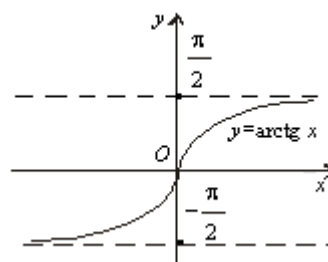


Функція $y = f(x)$ називається **непарною**, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ виконується умова $f(-x) = -f(x)$.

Графік непарної функції симетричний відносно початку координат.

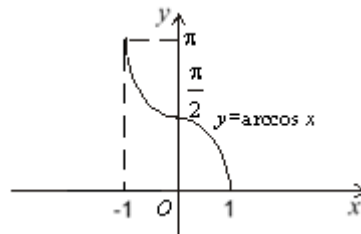
Функція $y = \operatorname{arctg} x$ – непарна, бо для всіх дійсних значень x має місце рівність:

$$\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x.$$



Якщо ж для $x \in D(f)$ $f(-x) \neq \pm f(x)$, функція буде ні парною, ні непарною.

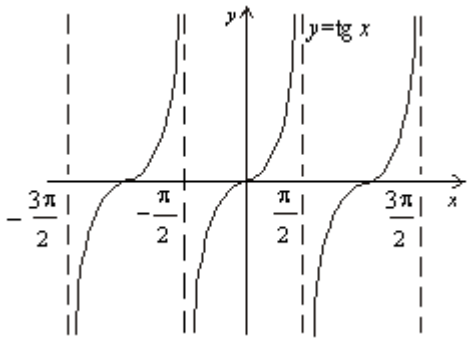
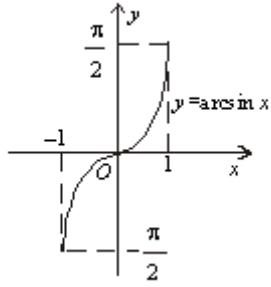
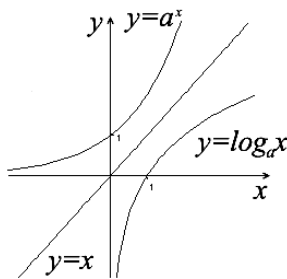
Функція $y = \arccos x$ – ні парна, ні непарна, адже при всіх значеннях x з проміжку $[-1; 1]$ $\arccos(-x) = \pi - \arccos x \neq \pm y(x)$.

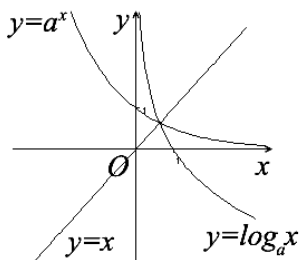


Дослідимо на парність та непарність функції:

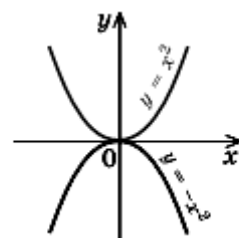
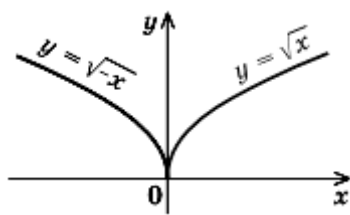
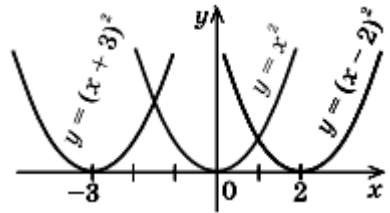
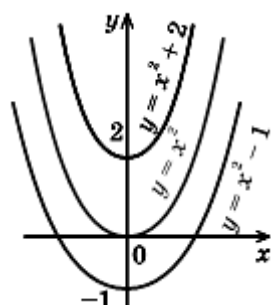
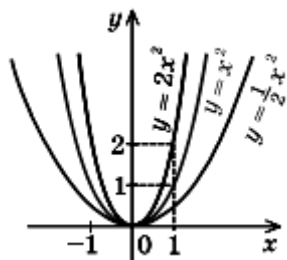
а) $y = 3\sin x - \frac{1}{x}$;

$$f(-x) = -3\sin x + \frac{1}{x} = -f(x) \text{ — непарна функція;}$$

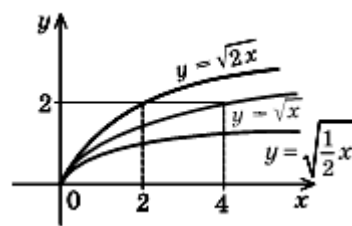
	б) $y = 2x + 5x^2$; $f(-x) = -2x + 5x^2 \neq \pm f(x)$ – функція ні парна, ні непарна; в) $y = 7^x + 7^{-x}$; $f(-x) = 7^{-x} + 7^x = f(x)$ – функція парна.
Функція $y = f(x)$ називається періодичною, якщо для будь-якого $x \in D(f)$ виконується умова $f(x+T) = f(x-T) = f(x)$. Число T – найменший додатний період функції.	Функція $y = \operatorname{tg} x$ – періодична з найменшим додатним періодом $T = \pi$, бо $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x - \pi) = \operatorname{tg} x$. 
Функція $y = f(x)$ називається обмеженою, якщо для всіх $x \in D(f)$ виконується умова $f(x) \leq M$, де $M > 0$ – деяке скінченне число.	Функція $y = \arcsin x$ є обмеженою для всіх $x \in [-1; 1]$, оскільки $\arcsin x \leq \frac{\pi}{2}$. 
Функція $y = f(x)$ називається монотонно зростаючою на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції, тобто має місце формула: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1).$	Показникова і логарифмічна функції з основою $a > 1$ є монотонно зростаючими на всій множині дійсних чисел. 
Функція $y = f(x)$ називається монотонно спадною на множині D, якщо для всіх $x \in D$ більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції,	Показникова і логарифмічна функції з основою $0 < a < 1$ є монотонно спадними на всій множині дійсних чисел.

тобто має місце формула: $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1).$	
--	---

ПЕРЕТВОРЕННЯ ГРАФІКІВ ФУНКЦІЙ

Для побудови графіка функції $y = -f(x)$ необхідно застосувати до побудованого графіка функції $y = f(x)$ перетворення симетрії відносно осі Ox.	
Для побудови графіка функції $y = f(-x)$ необхідно застосувати до побудованого графіка функції $y = f(x)$ перетворення симетрії відносно осі Oy.	
Для побудови графіка функції $y = f(x-a)$ необхідно застосувати до побудованого графіка функції $y = f(x)$ паралельне перенесення вздовж осі Ox на a одиниць.	
Для побудови графіка функції $y = f(x) + a$ необхідно застосувати до побудованого графіка функції $y = f(x)$ паралельне перенесення вздовж осі Oy на a одиниць.	
Для побудови графіка функції $y = kf(x)$, де $k > 0$, необхідно застосувати до побудованого графіка функції $y = f(x)$ розтяг або стиск вздовж осі Oy (розтяг при $k > 1$ і стиск при $0 < k < 1$)	

Для побудови графіка функції $y = f(kx)$, де $k > 0$, необхідно застосувати до побудованого графіка функції $y = f(x)$ розтяг або стиск вздовж осі Ox (розтяг при $0 < k < 1$ і стиск при $k > 1$)



ЗАСТОСУВАННЯ ФУНКЦІЙ В ЕКОНОМІЦІ

Приклад. Економічним підрозділом заводу встановлено, що при виробництві x одиниць продукції A щоквартальні витрати $V(x)$ виражаються формулою: $V(x) = 20000 + 40x$ (грн.), а доход $D(x)$, одержаний від продажу x одиниць продукції, виражається формулою $D(x) = 100x - 0,001x^2$ (грн.)

Кожного кварталу завод виробляє 3100 одиниць продукції A , але бажає збільшити випуск цієї продукції до 3200 одиниць. Обчислити приріст витрат, доходу та прибутку. Знайти середню величину приросту прибутку на одиницю приросту продукції.

Розв'язання. Запланований приріст продукції буде

$$\Delta x = 3200 - 3100 = 100 \text{ (од.)}$$

Приріст витрат $\Delta V(x) = V(3200) - V(3100) = (20000 + 40 \cdot 3200) - (20000 + 40 \cdot 3100) = 148000 - 144000 = 4000$ (грн.)

Приріст доходу $\Delta D(x) = D(3200) - D(3100) = (100 \cdot 3200 - 0,001 \cdot 3200^2) - (100 \cdot 3100 - 0,001 \cdot 3100^2) = 309760 - 300390 = 9370$ (грн.)

Позначимо прибуток $P(x)$. Тоді $P(x) = D(x) - V(x) = 100x - 0,001x^2 - (20000 + 40x) = 60x - 0,001x^2 - 20000$ (грн.)

Тоді шуканий приріст прибутку буде $\Delta P(x) = P(3200) - P(3100) = (60 \cdot 3200 - 0,001 \cdot 3200^2 - 20000) - (60 \cdot 3100 - 0,001 \cdot 3100^2 - 20000) = 161760 - 156390 = 9370$ (грн.) Отже, прибуток збільшиться на 9370 грн.

Середня величина приросту прибутку на одиницю приросту продукції буде: $\frac{\Delta P(x)}{\Delta x} = \frac{9370}{100} = 93,7$ (грн.)

НЕПЕРЕРВНІСТЬ ФУНКЦІЙ В ТОЧЦІ ТА НА ВІДРІЗКУ

Функція $y = f(x)$ називається **неперервною в точці** x_0 , якщо функція в цій точці визначена, має границю, причому границя функції в точці x_0 дорівнює значенню функції в цій точці, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Функція $y=f(x)$ називається **неперервною на відрізку**, якщо функція неперервна в кожній точці цього відрізка.

Приклад 1. Зарплата W продавця залежно від кількості x проданого товару (рис. 1) є функцією вигляду

$$W = \begin{cases} 100 + 2x & \text{при } x \leq 50 \\ 120 + 2x & \text{при } x > 50 \end{cases}$$

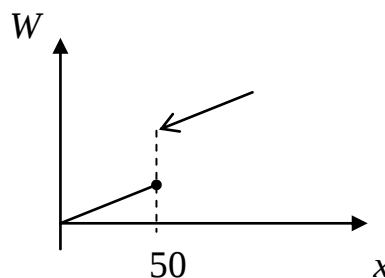


Рис. 1.

Функція $W(x)$ у точці $x=50$ не є неперервною (вона має розрив).

Справді, хоча $W(50)=200$, проте границя $\lim_{x \rightarrow 50} W(x)$ не існує, бо односторонні границі в точці $x=50$ не рівні між собою.

Приклад 2. Функція $f(x) = \frac{1}{3-x}$, область визначення якої $x \in (-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$ не буде неперервною в точці $x_0 = 3$, оскільки функція не визначена в цій точці.

Таким чином, **щоб дослідити функцію на неперервність** в точці x_0 , потрібно перевірити виконання трьох умов:

а) $f(x)$ визначена в точці x_0 і в деякому її околі.

б) Існує $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

в) Виконується рівність: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Якщо хоча б одна з названих умов не виконується, то x_0 є **точкою розриву** функції.

ТОЧКИ РОЗРИВУ ФУНКЦІЇ, ЇХ КЛАСИФІКАЦІЯ

x_0 – **точка розриву першого роду**, якщо односторонні границі функції в цій точці існують, але вони не рівні між собою, або ж не дорівнюють значенню функції в точці x_0 .

x_0 – **точка розриву другого роду**, якщо хоча б одна з односторонніх границь функції в цій точці не існує або дорівнює нескінченності.

Так, у **прикладі 1** точка $x=50$ є точкою розриву першого роду, а точка $x=3$ у **прикладі 2** є точкою розриву другого роду.

Приклад 3. Дослідити функцію $f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 0 \\ 1 + x^2, & x > 0 \end{cases}$

на неперервність у точках: а) $x=-1$; б) $x=0$; в) $x=2$.

Встановити характер точок розриву.

Розв'язання.

Зауважимо, що функція $f(x)$, яка є об'єднанням двох неперервних функцій, визначена в усіх точках $x \in \mathbb{R}$ і неперервна на інтервалах $(-\infty; 0)$ і $(0; +\infty)$. Це означає, що у точках $x=-1$ та $x=2$, які належать вказаним інтервалам, функція неперервна. Дослідимо функцію на неперервність у точці $x=0$.

- У точці $x=0$ функція визначена, її значення - $f(0)=0$.
- Знайдемо спочатку односторонні границі у даній точці:
 $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2) = 1 + 0 = 1$; $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} x = 0$. Таким чином, границя функції у точці $x=0$ не існує.

Маємо, що у точці $x=0$ дана функція має розрив першого роду.

Відповідь: а) функція неперервна; б) розрив першого роду; в) функція неперервна.

ОСНОВНІ ТЕОРЕМИ ПРО НЕПЕРЕРВНІ ФУНКЦІЇ

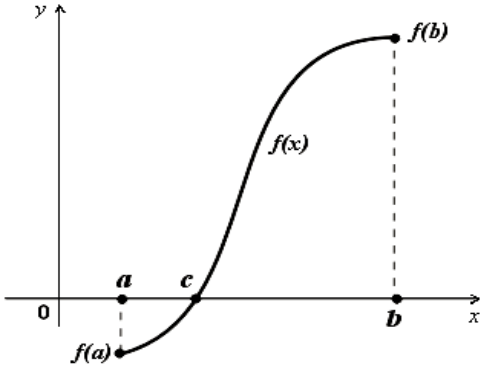
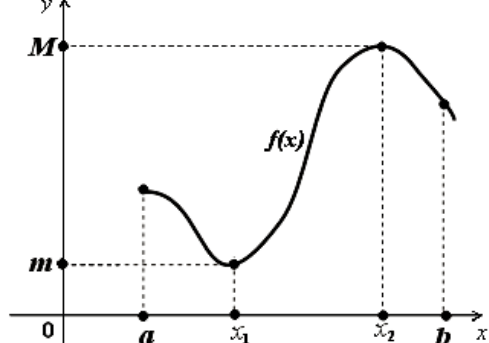
Теорема 1. Якщо функції $f(x)$ і $g(x)$ неперервні у точці $x = x_0$, то у цій точці будуть неперервними функції $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\frac{f(x)}{g(x)}$ (в останньому випадку за умови, що $g(x_0) \neq 0$).

Теорема 2. Якщо функція $y = F(u)$ — неперервна для $u \in U$, а функція $u = \varphi(x)$ — неперервна для $x \in X$ і значення функції $\varphi(x) \in U$, то складна функція $y = F(\varphi(x))$ — неперервна для $x \in X$.

Враховуючи неперервність функції $y = \sin x$, дослідимо функції $y = \cos x$, $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ на неперервність.

Оскільки $\cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, то функція $y = \cos x$ розглядається, як суперпозиція двох неперервних на множині дійсних чисел функцій: $y = \sin u$, $u = \frac{\pi}{2} - x$. Отже, за теоремою 2 функція $y = \cos x$ — неперервна при $x \in \mathbb{R}$.

Користуючись теоремою 1, можна встановити, що функція $y = \operatorname{tg} x$ — неперервна при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi; \frac{\pi}{2} + \pi\right)$, де $n \in \mathbb{Z}$, а функція $y = \operatorname{ctg} x$ — неперервна при $x \in (\pi, \pi + \pi)$, де $n \in \mathbb{Z}$, як відношення неперервних функцій $y = \sin x$ та $y = \cos x$.

Теорема 3 (Коші). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і на кінцях проміжку набуває значень різних знаків, то на інтервалі $(a; b)$ існує така точка $x = c$, що $f(c) = 0$. Наслідок. Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$ і $f(a) = A$, $f(b) = B$, то $y = f(x)$ на проміжку $[a; b]$ набуває всіх проміжних значень між числами A і B.	
Теорема 4 (Вейєрштрасса). Якщо функція $y = f(x)$ неперервна на проміжку $[a; b]$, то вона набуває на цьому проміжку свого найбільшого та найменшого значення.	

Питання для самоперевірки

1. Дайте означення функції, її області визначення і області значень. Назвіть основні способи задання функцій.
2. Наведіть приклади перетворення графіків функцій.
3. Сформулюйте означення границі функції в точці.
4. Сформулюйте основні теореми про границі.
5. Вкажіть умови, при виконанні яких функція буде неперервною.
6. Запишіть основні види невизначеностей, які виникають при обчисленні границь.
7. Вкажіть види точок розриву.

Завдання

1. Знайдіть границі функцій у точці та на нескінченності:

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 8x^2 + 1}{x + 3}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{8+x} - 3}{x - 1}.$

2. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 + 1}{7 + 2x^2}.$

5. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 3x^2 + 2x}{x^2 - x - 6}.$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x^2} - 2}{x^2}.$

6. $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{(x+3)\sqrt{1-x}}{9-x^2}.$

2. Дослідіть функцію на неперервність і встановіть характер точок розриву:

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq 0; \\ 1-x, & 0 < x \leq 2; \\ \frac{1}{2+x}, & x > 2. \end{cases}$$

Рекомендована література

1. Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика для економістів. – К.:ЦУЛ, 2010. – С. 174-199.
2. Васильченко І.П. Вища математика для економістів: Підручник. – К.: Знання – Прес, 2002. – С. 177-216.
3. Высшая математика для экономистов: Учебник для вузов / Н.Ш. Кремер и др. – М.: ЮНИТИ, 1999. – С. 125-166.
4. Математика для економістів: теорія та застосування./ Лавренчук В.П. та ін. - К.: Кондор, 2007. – С. 86-105.
5. Кривуца В.Г., Барковський В.В., Барковська Н.В. Вища математика. Практикум: Навч. посібник. – К.:ЦУЛ, 2005. – С. 134-160.
6. Богомолів М.В. Практичні заняття з математики, 1990. – С. 76-86.
7. Богомолів Н.В., Сергиєнко Л.Ю. Сборник дидактических заданий по математике. – М.: Высш.шк., 1987. – С. 52-54.